あるHartogs領域のベルグマン核の明示公式について (ポテンシャル論とベルグマン核)

山盛, 厚伺

数理解析研究所講究録
第1694巻 2010年 151-159

あるHartogs領域のベルグマン核の明示公式について

名古屋大学・多元数理科学研究科 山盛厚伺* (Atsushi Yamamori)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 序

一般に複素領域に対するベルグマン核の明示公式を得ることは困難な問題であり,このことがベルグマン核の研究を難しくしている一つの要因ともいえる.実際,現在具体的な表示が得られているような領域は,自己同型群が領域へ良い作用をしている場合や,正規直交基底が具体的に計算できる場合が殆んどである.さらにそれらの方法は(単位円板などの簡単な場合を除き)かなりの計算量が必要とされる.従って,明示公式が得られるような領域を(少ない計算量で)新しく見出すことは意味のある問題であるといえる.

この論説では,従来とは違う方法を用いて具体的にベルグマン核が書き下せるような領域を新しく提供する.ここでは $D_{n,m}:=\{(z,\zeta)\in\mathbb{C}^{n}\times\mathbb{C}^{m};||\zeta||^{2}<e^{-\mu||z||^{2}}\}$ を考察する(ここで,μ は正の実数定数).

§2で述べるがこの領域のベルグマン核とFock-Bargmann核(例2.2)はLigockaの定理(定理2.1)によって非常に密接に関係している.この論説で $D_{n,m}$ という領域を考察するのはこのような事情があるからである.

今回この論説で領域 $D_{n,m}$ のベルグマン核の明示公式を得るために,自己同型群の作用を用いるものでも,正規直交基底を具体的に書き下す方法でもなく,Ligockaの定理というHartogs領域のベルグマン核とその底空間の重み付きベルグマン核との間に成り立つ公式を用いる.論文[23]においては解析的な手法によって $D_{n,m}$ のベルグマン核の具体的公式を得たのであるが,この論説では別証明をあたえることにしよう.この方法は[7]で使われているものの類似であり,後で述べるLu Qi-Keng問題を考察する際にも重要になる.

本稿の構成は以下の通りである.まず§2において証明に必要な定義,結果を導入する.§3において主定理の証明を行う.§4では我々の明示公式を用いて領域 $D_{n,m}$ のLu Qi-Keng問題を考察する.§5では関連する問題について述べる.

Lu Qi-Keng問題とは領域 D のベルグマン核が($D\times D$ 上で)zero-freeかどうか判定せよという問題である.この問題は十年ほど前から多数の人がいろいろな領域に対し研究を行っている.例えば[3,4,16,20,25,26]を参照.この問題の動機はBergmanが導入した代表座標の定義可能性を問うものである(詳しくは[4]を参照).代表座標は多くの著者によりさまざまな研究がされており(例えば[2,15,21]を参照),様々な応用がある.従って,その定義可能性を問うLu Qi-Keng問題も重要であるといえる.

*e-mail:d08006u@math.nagoya-u.ac.jp

2 準備

2.1 ベルグマン核と重み付きベルグマン核

複素領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ に対し $L_a^2(\Omega)$ で Ω 上の正則関数で二乗可積分な関数全体のなす空間を表す ($L_a^2(\Omega)$ はベルグマン空間と呼ばれる). このとき, $L_a^2(\Omega)$ の完全正規直交基底 $\{\phi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ に対し

$$K_\Omega(z,w) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(w)},$$

と定義する. 関数 K_Ω をベルグマン核という. ベルグマン核は再生性からも定義される. すなわち, $L_a^2(\Omega)$ に内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}dz, \quad f, g \in L_a^2(\Omega),$$

により定義する. このときベルグマン核 $K_w(z) = K(z,w)$ は任意の $f \in L_a^2(\Omega)$ に対し

$$f(z) = \langle f, K_z\rangle = \int_\Omega f(w)K(z,w)dw \quad (z \in \Omega),$$

となるような関数としても定義される.

重み付きベルグマン核も必要なので導入する. $\rho(z)$ を Ω 上の正値関数とする. Ω 上の二乗可積分な関数全体がなす空間に

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\rho(z)dz, \quad f, g \in L_a^2(\Omega),$$

によって内積を導入する. この空間を重み関数 ρ に関する重み付きベルグマン空間といい, この空間の再生核を重み付きベルグマン核という. ベルグマン核, 重み付きベルグマン核ともに具体的表示が知られているのは限られた領域だけである.

ベルグマン核を具体的に書き下せるような領域で最も簡単なものは単位円盤である:

例 2.1 (単位円盤). 単位円盤 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ 上のベルグマン空間 $L_a^2(\mathbb{D})$ の正規直交基底として具体的に $\{\pi^{-1/2}(n+1)^{1/2}z^n\}$ がとれるので, ベルグマン核は

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z\overline{w})^n = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}|_{t=z\overline{w}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2},$$

となる.

次に重み付きベルグマン核で具体的表示が得られているものとして Fock-Bargmann 核を例として挙げる. またこの例は我々の証明の中でも重要になってくる.

例 2.2 (Fock-Bargmann 空間). *Fock-Bargmann* 空間とは $L_a^2(\mathbb{C}^n, e^{-\mu\|z\|^2})$ なる空間 (ここで μ は正の実数) であり, この空間の再生核を *Fock-Bargmann* 核とよぶ ([1,11] を参照).

単項式 $f_\alpha = z^\alpha (= z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n})$ に対し

$$||f_\alpha||^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |z^\alpha|^2 e^{-\mu||z||^2} dV(z) = \frac{\pi^n \alpha!}{\mu^{|\alpha|+n}},$$

となるので

$$\{g_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} = \{\left(\frac{\pi^n \alpha!}{\mu^{|\alpha|+n}}\right)^{-1/2} z^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \subset L_a^2(\mathbb{C}^n, e^{-\mu||z||^2}),$$

とすると, $\{g_\alpha\}$ は $L_a^2(\mathbb{C}^n, e^{-\mu||z||^2})$ の正規直交基底になる.

従って Fock-Bargmann 核 $K_{n,\mu}(z,w)$ は

$$\begin{aligned} K_{n,\mu}(z,w) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} g_\alpha(z)\overline{g_\alpha(w)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} \left(\frac{\pi^n \alpha!}{\mu^{|\alpha|+n}}\right)^{-1} z^\alpha \overline{w}^\alpha = \frac{\mu^n}{\pi^n} \prod_{k=1}^n \sum_{\alpha_k=0}^\infty \frac{\mu^{\alpha_k}}{\alpha_k!} z_k^{\alpha_k} \overline{w_k}^{\alpha_k} \\ &= \frac{\mu^n}{\pi^n} e^{\mu\langle z,w \rangle}, \end{aligned}$$

となる. ベルグマン核の具体的表示が知られている領域としてはこの他に

- 古典領域 [14] ,
- Cartan-Hartogs 領域 [24] ,
- Cartan-Hartogs 領域を一般化したもの [22] ,
- minimal ball [18] ,
- complex ellipsoids [10, 19] ,

などがある. [22, 24] では Cartan-Hartogs 領域 (およびその一般化) のベルグマン核を具体的に書き下すために正規直交基底による方法と自己同型群の作用を用いる方法を上手く組み合わせているが証明に長い計算を要している. この論説や [23] のアイデアを用いると彼らのものと比べ少ない計算量で見通しのよい簡明な証明が得られる.

2.2 多重対数関数

領域 $D_{n,m}$ のベルグマン核の表示には多重対数関数が必要になるのでここで導入しておこう.

定義 2.1. 多重対数関数 *(polylogarithm function)* は $Li_s(z) = \sum_{k=1}^\infty k^{-s} z^k$ によって定義される関数で $|z| < 1, s \in \mathbb{C}$ なる条件の下で収束する. 特に s が負整数ならば ($s = -n$ とおく),

$$Li_{-n}(z) = \sum_{j=0}^n A(n,j) z^j (1-z)^{-n-1},$$

という表示を持つ．ここで $A(n,m)$ は

$$A(n,m) = \sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{\ell}\binom{n+1}{\ell}(m-\ell)^{n},$$

で定義される．

多重対数関数は通常の対数関数の自然な一般化になっている．実際, $s=1$ のときは多重対数関数は $-\log(1-z)$ に一致する．また $s=2$ の場合は dilogarithm と呼ばれておりゼータ関数との関わりが深い．なお我々の目的に必要なのは s が負整数の場合のみである．dilogarithm がゼータ関数と関わりが深いと述べたが, s が負整数の場合もゼータ関数と関わりがある．s が負整数の場合を考察したのはオイラーが最初であるようだが, その動機はゼータ関数の負整数での特殊値を求めるためであった [13].

負整数の場合の最初の幾つかを挙げてみると次のようになる:

例 2.3.

$$Li_{-1}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad Li_{-2}(z) = \frac{z^2+z}{(1-z)^3}, \quad Li_{-3}(z) = \frac{z^3+4z^2+z}{(1-z)^4},$$

$$Li_{-4}(z) = \frac{z^4+11z^3+11z^2+z}{(1-z)^5}, \quad Li_{-5}(z) = \frac{z^5+26z^4+66z^3+26z^2+z}{(1-z)^6}.$$

後の証明で必要になる多重対数関数の性質をここでまとめておこう．

命題 2.1.

(1) $\dfrac{d}{dt}Li_s(t) = Li_{s-1}(t)/t$ ([6, 式 (2.1)] を参照),

(2) $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}j!S(n,j)(1-t)^{-1-j} = Li_{-n}(t)/t$ ([6, 式 (2.10b)] を参照),

ここで $S(n,m)$ は第 2 種スターリング数とよばれるもので次で定義される:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\binom{m}{i}(m-i)^{n}.$$

2.3 Ligocka の定理

このセクションでは我々の証明で重要な役割を果たすことになる結果を紹介する．Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の領域 (有界である必要はない) とし, $p(z)$ を Ω 上の正値, 連続な関数とする．このとき, 領域 Ω_m を $\Omega_m := \{(z,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{C}^m; ||\zeta||^2 < p(z)\}$ によって定義する．このとき Ligocka は Ω_m のベルグマン核が領域 Ω 上の重み付きベルグマン核を使って表されることを証明した．

定理 2.1 ([17]). 関数 K_m を Ω_m のベルグマン核, K_{Ω,p^k} を Ω 上の重み関数 p^k に関する重み付きベルグマン核とする．このとき K_m は重み付きベルグマン核を用いて次の様に表される．

$$K_m((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{m!}{\pi^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+1)_k}{k!}K_{\Omega,p^{k+m}}(z,z')\langle\zeta,\zeta'\rangle^k.$$

ここで, $(a)_k$ は *Pochhammer symbol*$(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ を表す．

この定理に関連する話題については Ligocka の原論文の他に [5,8,9] を参照.

注意 2.1. *Ligocka* の原論文では領域 Ω に有界という条件が課されているがそれは本質的でなく, 有界でなくても定理は成り立つ.

また *Ligocka* の定理は Ω_m のベルグマン核に対する定理であるが, さらに

$$\Omega_{\mathbf{m}} = \left\{ (z, \zeta_1, \cdots, \zeta_N) \in \Omega \times \mathbb{C}^{m_1} \cdots \times \mathbb{C}^{m_N}; \sum_{i=1}^{N} \frac{||\zeta_i||^2}{\phi_i(z)} < 1 \right\},$$

という領域まで一般化することができる (*N=1* の場合がオリジナルの *Ligocka* の定理). ここで, $\Omega \subset \mathbb{C}^n, \mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_N) \in \mathbb{N}^N, \phi_i$ は Ω 上の正値, 連続関数. しかし, 今回の論説の目的には必要ないのでのこれ以上述べない.

2.4 Inflation の原理

Hartogs 領域のベルグマン核を具体的に書き下す場合に非常に有用で度々用いられている Inflation の原理について触れておく. 記号はセクション 2.3 のものを引き続き使う.

領域 Ω_1 は変換 $(z, \zeta) \mapsto (z, e^{i\theta}\zeta)$ によって不変である. 従って, Ω_1 のベルグマン核 K_1 に対し, ある関数 $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ が存在し, $K_1((z,\zeta),(z',\zeta')) = L(z, z', \zeta\zeta')$ と書ける. [3] で Boas 達は K_m が関数 L とその微分を使って表されることを示した.

定理 2.2. 領域 Ω_m のベルグマン核 K_m は関数 L を用いて次の様に表される:

$$K_m((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{1}{\pi^{m-1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} L(z, z', t)|_{t=\langle \zeta, \zeta' \rangle}.$$

注意 2.2. 前節で述べた *Ligocka* の定理を用いると原論文 [3] とは違う方法で Inflation の原理を証明することができる.

ベルグマン核の具体形を得る際 Inflation の原理を用いている論文として [22, 24] をあげておく.

3 主定理の証明

主定理の証明に入る前に一つ補題を用意する.

補題 3.1. P を多項式とする. このとき c_j を $P(x) = \sum_{j=0}^{degP} c_j \frac{(x)_j}{j!}$ なる式によって定義する. このとき,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k+1)\xi^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{degP} c_j \frac{(k+1)_j}{j!} \xi^k = \sum_{j=0}^{degP} c_j (1-\xi)^{-j-1},$$

となる. 特に $P(x) = x^n$ とすると $c_j^n = (-1)^{n+j} j! S(n, j)$ となる.

Proof. 前半部分は単純計算であるので省略し, c_j^n に関するところのみ証明する.

Pochhammer symbol $(a)_k$ と falling factorial$(a)^{\underline{k}} = a(a-1)\cdots(a-(k-1))$ との間に成り立つ関係式 $(a)_k = (-1)^k(a)^{\underline{k}}$ と x^n の第二種スターリング数と falling factorial による表示 $x^n = \sum_{j=0}^n S(n,j)(x)^{\underline{j}}$ を用いると $x^n = \sum_{j=0}^n(-1)^{n+j}S(n,j)(x)_j$, となることがわかる. 以上で $c_j^n = (-1)^{n+j}j!S(n,j)$ となることが示せた. □

主結果は次の定理である.

定理 3.1. 領域 $D_{n,m}$ のベルグマン核 $K_{D_{n,m}}$ は次で表される:

$$K_{D_{n,m}}((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{\mu^n}{\pi^{n+m}}e^{m\mu\langle z,z'\rangle}\frac{d^m}{dt^m}Li_{-n}(t)|_{t=e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle} \tag{1}$$

$$= \frac{\mu^n}{\pi^{n+m}}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\frac{Li_{-(n+1)}(e^{\mu\langle z,z'\rangle}t)}{t}|_{t=\langle\zeta,\zeta'\rangle}. \tag{2}$$

Proof. 例 2.2 で述べた Fock-Bargmann 核の具体的表示と Ligocka の定理より $D_{n,1}$ のベルグマン核は

$$K_{D_{n,1}}((z,\zeta),(z',\zeta')) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\frac{(k+1)^n\mu^n}{\pi^n}e^{\mu(k+1)\langle z,z'\rangle}(\zeta\overline{\zeta}')^k$$

$$= \frac{\mu^n}{\pi^{n+1}}e^{\mu\langle z,z'\rangle}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{n+1}(e^{\mu\langle z,z'\rangle}\zeta\overline{\zeta}')^k,$$

となる. ここで補題 3.1 よりこの式は

$$\frac{\mu^n e^{\mu\langle z,z'\rangle}}{\pi^{n+1}}\sum_{j=0}^{n+1}c_j^{n+1}(1-e^{\mu\langle z,z'\rangle}\zeta\overline{\zeta}')^{-1-j}$$

に等しい. ここで命題 2.1.(2) を用いるとこの式は次と等しくなる:

$$\frac{\mu^n e^{\mu\langle z,z'\rangle}}{\pi^{n+1}}\frac{Li_{-(n+1)}(e^{\mu\langle z,z'\rangle}t)}{t}|_{t=\zeta\overline{\zeta}'}.$$

以上で $m=1$ の場合のベルグマン核の式が得られた. 一般の m についてはこの $m=1$ の場合と Inflation の原理を用いればよい.

いまの場合, 関数 $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ にあたるものは

$$L(z,z',t) = \frac{\mu^n e^{\mu\langle z.z'\rangle}}{\pi^{n+1}}\frac{Li_{-(n+1)}(e^{\mu\langle z,z'\rangle}t)}{t},$$

であるから, Inflation の原理を適用すれば目的の式 (2) が得られる. 式 (2) から式 (1) を導くには命題 2.1.(1) を用いれば良い. 以上によって証明が完了した. □

注意 3.1. なお $\frac{d^m}{dt^m}Li_{-n}(t)$ は第二種スターリング数 $S(\cdot,\cdot)$ を用いて

$$\frac{d^m Li_{-n}(t)}{dt^m} = \frac{m!\sum_{j=0}^n(-1)^{n+j}(m+1)_j S(1+n,1+j)(1-t)^{n-j}}{(1-t)^{n+m+1}},$$

のように表される. また第一種スターリング数とレルヒの超越関数を用いた表示もある [27].

4 Lu Qi-Keng 問題への応用

§1 にも述べた通り, この節では領域 $D_{n,m}$ に対する Lu Qi-Keng 問題について述べる. [23] では以下の補題を用いて $D_{n,m}$ に対する Lu Qi-Keng 問題をある条件の下で解いた.

補題 4.1. 関数 $Li_{-n}(z)/z$ は任意の $n \geq 3$ に対し $|z_0| < 1$ なる零点 z_0 をもつ. なお $n = 1, 2$ のときは $|z_0| < 1$ なる零点は持たない (例 *2.3* 参照).

補題 4.2. $Li_{-2}(t)/t$ の $m-1$ 階微分は

$$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\frac{Li_{-2}(t)}{t} = \frac{(m+1)!(t+m)}{(1-t)^{m+2}},$$

と表される.

補題 4.3. $|\alpha| < 1$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し, $\alpha = e^{\mu\langle z,z'\rangle}\langle\zeta,\zeta'\rangle$ となる $(z,\zeta),(z',\zeta') \in D_{n,m}$ が存在する.

それぞれの補題の証明は [23] で行われているので省略する.
これらの補題からつぎの結果が得られる.

定理 4.1 ([23]). 領域 $D_{n,m}$ は $n = 1, m \geq 1$ のとき *zero-free* であり, $m = 1, n \geq 2$ のとき零点を持つ.

5 関連する問題

最後に関連する問題, 話題について述べる. このうちのいくつかは RIMS 研究集会の際に提案されたものでありこの場を借りて感謝します.

問題 1. 一般の場合の $D_{n,m}$ の *Lu Qi-Keng* 問題はどのようになっているか?

問題 2. *Ligocka* は [17] においてセゲー核に対しても類似の公式を得ている. それに対しこの論説と類似の方法を適用するとなにがでてくるか?

問題 3. 領域 $D_{n,m}$ 自体は非有界であるが $D_{n,m}$ と双正則同値であるような有界な領域 $D'_{n,m}$ はあるか?

問題 4. *Kashiwara* の *holonomy* 系との関連は?

Kashiwara の holonomy 系については [12] を参照.

謝辞: 筆者に講演の機会および本講究録の執筆の機会を与えて下さった大沢健夫先生, また本原稿について多くの有益なコメントを頂いた伊師英之先生に深く感謝します.

参考文献

[1] V. Bargmann. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. II: A family of related function spaces. Application to distribution theory. *Commun. Pure Appl. Math.*, 20:1–101, 1967.

[2] S.R. Bell. Bergman coordinates. *Studia Math.*, 176:60–83, 2006.

[3] H. P. Boas, S. Fu, and E. J. Straube. The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(3):805–811, 1999.

[4] H.P. Boas. Lu Qi-Keng's problem. *J. Korean Math. Soc*, 37(2):253–267, 2000.

[5] B.Y. Chen. Weighted Bergman kernel: asymptotic behavior, applications and comparison results. *Studia Math.*, 174(2):111–130, 2006.

[6] D. Cvijovic. Polypseudologarithms revisited. *Physicia A*, 389:1594–1600, 2010.

[7] F.Z. Demmad-Abdessameud. Polynôme de Hua, noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs et problème de Lu Qikeng. *Rend. Semin. Mat., Univ. Politec. Torino*, 67(1):55–89, 2009.

[8] M. Engliš. A Forelli-Rudin Construction and Asymptotics of Weighted Bergman Kernels. *J. Func. Anal.*, 177(2):257–281, 2000.

[9] M. Engliš and G. Zhang. On a generalized Forelli-Rudin construction. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 51(3):277–294, 2006.

[10] G. Francsics and N. Hanges. The Bergman kernel of complex ovals and multivariable hypergeometric functions. *J. Func. Anal.*, 142(2):494–510, 1996.

[11] B.C. Hall. Holomorphic methods in analysis and mathematical physics. *First Summer School in Analysis and Mathematical Physics: quantization, the Segal-Bargmann transform, and semiclassical analysis, Cuernavaca Morelos, Mexico, June 8-18, 1998*, 260:1, 2000.

[12] K. Hirachi. The second variation of the Bergman kernel of ellipsoids. *Osaka J. Math.*, Vol. 30(3):457–473, 1993.

[13] F. Hirzebruch. Eulerian polynomials. *Munster J. Math*, 1:9–14, 2008.

[14] L. K. Hua. Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains. *A.M.S. Translations of mathematical monographs*, Vol. 6, 1964.

[15] H. Ishi and C. Kai. The representative domain of a homogeneous bounded domain. *Kyushu J. Math.*, to appear.

[16] M. Jarnicki and P. Pflug. Invariant distances and metrics in complex analysis-revisited. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 430:1–192, 2005.

[17] E. Ligocka. Forelli-Rudin Constructions and weighted Bergman projections. *Studia Math*, 94:257–272, 1989.

[18] K. Oeljeklaus, P. Pflug, and E.H. Youssfi. The Bergman kernel of the minimal ball and applications. *Annales de l'institut Fourier*, 47(3):915–928, 1997.

[19] J.D. Park. New formulas of the Bergman kernels for complex ellipsoids in $\mathbb{C}^2$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(12):4211–4221, 2008.

[20] Lu Qikeng. The conjugate points of $\mathbb{CP}^\infty$ and the zeroes of Bergman kernel. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 29(3):480–492, 2009.

[21] W.D. Ruan. Canonical coordinates and Bergman metrics. *Comm. Anal. Geom.*, 6(3):589–631, 1998.

[22] A. Wang, L. Y. Zhang, J. X. Bai, W. Zhang and J. D. Park. Zeros of Bergman kernel on some Hartogs domains. *Sci. China Ser. A*, 52(12):2730–2742, 2009.

[23] A. Yamamori. The Bergman kernel of a certain Hartogs domain and the polylogarithm function. in preparation.

[24] W. Yin. The Bergman kernels on Cartan-Hartogs domains. *Chinese Sci. Bull.*, 44(21):1947–1951, 1999.

[25] W. Yin. Lu Qi-Keng conjecture and Hua domain. *Sci. China Ser. A*, 51(4):803–818, 2008.

[26] L. Zhang and W. Yin. Lu Qi-Keng's problem on some complex ellipsoids. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 357:364–370, 2009.

[27] The Wolfram Functions Site. `http://functions.wolfram.com/10.08.20.0008.02`